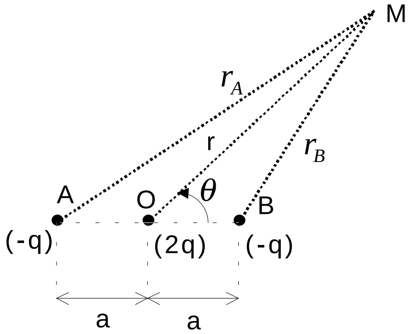
-EXERCICE 26.1-

• ENONCE :

« Quadrupôle électrostatique »

On considère la distribution de charges suivante :



Des charges (-q) sont placées aux points A et B, tandis qu'une charge (2q) est placée en O.

Dans le cadre de l'approximation dipolaire, on demande de calculer le potentiel électrostatique en M; comparer au cas du dipôle et conclure.
Calculer le champ électrostatique.

• CORRIGE :

« Quadrupôle électrostatique »

• Par superposition, nous pouvons écrire : $V(M)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{2}{r}-\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B})$

• Un développement limité au **1^er ordre** conduirait à :

$r_A=[(r\cos\theta+a)^2+(r\sin\theta)^2]^{1/2}=[r^2+2ar\cos\theta+a^2]^{1/2}$ et:

$r_B=[(r\cos\theta-a)^2+(r\sin\theta)^2]^{1/2}=[r^2-2ar\cos\theta+a^2]^{1/2}$ $\Rightarrow$

$r_A\simeq r(1+\frac{a\cos\theta}{r})$ et: $r_B\simeq r(1-\frac{a\cos\theta}{r})$, car $(\frac{a}{r})^2$ est du 2ème ordre ; ainsi :

$r_A^{-1}=\frac{1}{r}(1-\frac{a\cos\theta}{r})$ et: $r_B^{-1}=\frac{1}{r}(1+\frac{a\cos\theta}{r})$ $\Rightarrow$ $\boxed{V(M)=0}$

• Il faut donc pousser le développement limité au **2ème ordre** ; il vient alors :

$r_A^{-1}=\frac{1}{r}[1-\frac{1}{2}\times(\frac{2a\cos\theta}{r}+\frac{a^2}{r^2})+(\frac{-1}{2}\times\frac{-3}{2}\times\frac{1}{2})(\frac{2a\cos\theta}{r}+\frac{a^2}{r^2})^2]\simeq\frac{1}{r}[1-\frac{a\cos\theta}{r}+\frac{a^2}{2r^2}+\frac{3}{2}(\frac{a\cos\theta}{r})^2]$;

De même :

$r_B^{-1}=\frac{1}{r}[1+\frac{1}{2}\times(\frac{2a\cos\theta}{r}+\frac{a^2}{r^2})+(\frac{-1}{2}\times\frac{-3}{2}\times\frac{1}{2})(\frac{-2a\cos\theta}{r}+\frac{a^2}{r^2})^2]\simeq\frac{1}{r}[1+\frac{a\cos\theta}{r}+\frac{a^2}{2r^2}+\frac{3}{2}(\frac{-a\cos\theta}{r})^2]$.

D'où :

$$\boxed{V(M)=\frac{qa^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}[1-3\cos^2(\theta)]}$$

Rq : le potentiel décroît en $1/r^3$, donc plus vite que dans le cas du dipôle ; pour une distribution plus « compliquée », on obtient des termes en $1/r^4$, $1/r^5$ … : c'est le développement «**multipolaire** » d'une distribution de charges.

• Le champ électrostatique est obtenu grâce à la relation $\vec{E}=-\overrightarrow{grad}V$ exprimée en coordonnées polaires ; on a :

$\boxed{E_r=-\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{3qa^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}[1-3\cos^2(\theta)]}$ et : $\boxed{E_\theta=-\frac{1}{r}\times\frac{\partial V}{\partial\theta}=\frac{-3qa^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}(2\cos\theta\times\sin\theta)=\frac{-3qa^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\sin(2\theta)}$

Rq : logiquement, le champ décroît également plus vite que pour un dipôle.